

Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімді пластинаны есептеу әдісі

Аңдатпа. Мақалада көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаның жетілдірілген ақырлы элементі ұсынылған. Көлденең ығысу деформациясы ақырлы элементтің түйіндеріндегі жылжулар арқылы параметр түрінде ескерілген. Ақырлы элементтер әдісі бойынша көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаның ақырлы элементінің негізгі тәуелділігі мен қатаңдық матрицасы табылған. Төрт бұрышты ақырлы элементтің көлденең ығысу деформациясын ескергендегі координаттық функциялары анықталған. Ақырлы элементтер әдісі арқылы пластинаның есептеуі толығымен автоматтандырылған. Мысал ретінде көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімді пластинаның иілуі көрсетілген. Үш жағдайдағы серпімді пластинаның түйіндік тік жылжулары, бұрылу бұрыштары, иілу моменттері, бұралу моменті және көлденең күштерінің сандық нәтижелері алынған. Үш жағдайдағы серпімді пластинаның алынған шешімдері бір-бірімен салыстырылған. Есептеу нәтижелері кестелер мен эпюралар арқылы көрсетілген.

Кілт сөздер: пластина, ақырлы элемент, көлденең ығысу деформациясы, көлденең ығысу параметрі, майысу функциясы.

DOI: doi.org/10.32523/2616-7263-2022-140-3-16-31

Кіріспе

Пластиналар мен қабықшалар ғимараттар, көпірлер, тоннельдер, тірек қабырғалары және басқа инфрақұрылымдар сияқты құрылыс конструкциялардың жалпы құрылымдық элементтері болып табылады. Жалпы алғанда, пластиналы және қабықшалы конструкциялардың әрекетін екі өлшемді пластина теориялары немесе үш өлшемді серпімділік теориясы арқылы болжауға болады. Пластиналардың классикалық теориясы Кирхгоф ұсынған болжамдарға сүйенеді [1]. Дегенмен, бұл теория ығысу деформациясының әсері шамалы ғана болатын жұқа пластиналар үшін ғана қолданылады. Классикалық теория бойынша қалың пластиналарды есептегенде майысудың мәні төмендетіліп анықталады және орнықтылықты жоғалту жүктемесі мен меншікті жиіліктер асыра бағаланады.

Ығысу деформациясының әсерлерін ескеретін көптеген теориялар ұсынылды. Ығысу деформациясының алғашқы теорияларының бірін Рейснер [2] және Миндлин [3] анықтады. Миндлин теориясы пластинаның қалыңдығы бойынша жылжудың сызықтық өзгерісі туралы болжамға негізделген. Сондықтан, ол бірінші ретті ығысу деформациясының теориясы деп аталады. Бұл болжам бойынша көлденең ығысу деформациялары мен көлденең ығысу кернеулері қалыңдығы бойынша тұрақты болады. Үш өлшемді серпімділік теориясындағы тұрақты жанамалық кернеулер мен жанамалық кернеудің параболалық таралуы арасындағы сәйкессіздікті есепке алу үшін ығысудың түзету коэффициенті қажет. Екінші жағынан, Рейснер теориясы қалыңдығы бойынша иілу кернеулерінің сызықтық өзгеруі және көлденең жанамалық кернеулерінің параболалық таралуы туралы болжамдарға негізделген. Бұл жорамалдар пластинаның қалыңдығы бойынша жылжудың сызықты болуы міндетті емес және Миндлин

теориясы жағдайындай ығысудың түзету коэффициентінің қажет еместігіне әкеледі. Бірінші ретті ығысу деформациясы теориясында ығысудың түзету коэффициентін қолдануды жою және өте қалың пластиналарды есептеуде дұрыс болжам жасау үшін жоғары ретті ығысу деформациясының теориялары ұсынылды [4-10].

Пластинаның классикалық теориясында ескерілмеген факторларды (көлденең ығысу, көлденең қысылу, көлденең қысым) ескеру үшін ақырлы элементтер әдісін қолданып, көптеген нақтыланған теориялар жасалынған [11]. Оларды ескеру майысу функциясымен қатар жаңа функция енгізу арқылы жүргізілген. Осы теорияларды ақырлы элементтер әдісімен жүзеге асыру үшін ақырлы элементтердің еркіндік дәрежесін классикалық теорияға қарағанда әлде қайда көбейтуді талап еткен.

Ұсынылып отырған мақалада мына жұмыстар зерттелмек:

1. Төрт бұрышты ақырлы элементтің көлденең ығысу деформациясын ескергендегі координаттық функцияларын және қатаңдық матрицасын анықтау;
2. Серпімді тіректі пластинаның иілуіндегі әр түрлі факторларды ескеру;
3. Ақырлы элементтер әдісі бойынша пластинаның есептеуін толық автоматтандыру;
4. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімді тіректі изотропты пластинаның иілуін есептеу.

Материалдар мен әдістер

Төртбұрышты пластинаны классикалық теория бойынша есептегенде көлденең ығысу деформациясы ескерілмейді. Осы деформацияны ескеру басқа теориялардың негізіне жатады да, ол жаңа функция арқылы сипатталады.

Пластинаның классикалық теориясындағы жалпылаған көлденең күштерді анықтайтын өрнектерді қолданып көрелік:

$$\begin{aligned} Q_1 &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 W + \frac{\partial M_{12}}{\partial y}, & Q_1^0 &= \int_0^1 Q_1 dy, \\ Q_2 &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 W + \frac{\partial M_{12}}{\partial x}, & Q_2^0 &= \int_0^1 Q_2 dx, \\ \nabla^2 W &= \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, & D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \end{aligned} \quad (1)$$

мұнда Q_1, Q_2 - x және y өстеріндегі көлденең күштер, $W(x, y)$ - пластинаның майысу функциясы, M_{12} - бұралу моменті, $\nabla^2 W$ - Лаплас операторы, ν - Пуассон коэффициенті, D - ақырлы элементтің цилиндрлік қатаңдығы, E - серпімділік модулі, h - пластинаның қалыңдығы.

Пластинаның пішін функциясын векторлық түрде былайша жазамыз:

$$W(x, y) = \bar{q}^T \cdot V, \quad (2)$$

мұнда \bar{q}^T - пластинаның координаттық функцияларының транспонирленген векторы, V - түйін жылжуларының векторы.

Пішін функциясының мәнін (2) қолданып, көлденең күштердің формулаларын (2) ақырлы элементтің түйіндеріндегі жылжулары арқылы өрнектейміз ($\varphi_i \rightarrow \alpha_i, \psi_i \rightarrow \beta_i, a \rightarrow a_1, b \rightarrow a_2, i = 1, 2, 3, 4$):

$$Q_1^0 = -D \cdot \left\{ \frac{6}{a_1^3} W_1 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_1 + \frac{1}{a_1 a_2} \beta_1 - \frac{6}{a_1^3} W_2 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_2 - \frac{1}{a_1 a_2} \beta_2 - \right. \\ \left. - \frac{6}{a_1^3} W_3 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_3 + \frac{1}{a_1 a_2} \beta_3 + \frac{6}{a_1^3} W_4 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_4 - \frac{1}{a_1 a_2} \beta_4 \right\} + \frac{D(1-\nu)}{a_1 a_2} (\beta_1 - \beta_2 + \beta_3 - \beta_4) \quad (3)$$

$$Q_2^0 = -D \cdot \left\{ \frac{6}{a_2^3} W_1 + \frac{1}{a_1 a_2} \alpha_1 + \frac{3}{a_2^2} \beta_1 + \frac{6}{a_2^3} W_2 - \frac{1}{a_1 a_2} \alpha_2 + \frac{3}{a_2^2} \beta_2 - \right. \\ \left. - \frac{6}{a_2^3} W_3 + \frac{1}{a_1 a_2} \alpha_3 + \frac{3}{a_2^2} \beta_3 - \frac{6}{a_2^3} W_4 - \frac{1}{a_1 a_2} \alpha_4 + \frac{3}{a_2^2} \beta_4 \right\} + \frac{D(1-\nu)}{a_1 a_2} (\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) \quad (4)$$

Осы көлденең күштер классикалық емес теория бойынша былайша анықталады:

$$Q_1^0 = -\frac{1}{\mu_0} GF \cdot \psi, \quad Q_2^0 = -\frac{1}{\mu_0} GF \cdot \chi, \quad (5)$$

мұнда ψ, χ - көлденең ығысудан пайда болған бұрыштар, μ_0 - көлденең ығысу деформациясының өзгеру заңдылығына тәуелді параметр (тұрақты болғанда $\mu_0 = 1$, парабола бойынша өзгергенде $\mu_0 = 1,2$), GF - элементтің көлденең ығысу қатаңдығы.

Көлденең ығысу бұрыштарын анықтау үшін жаңа белгісіздер енгіземіз:

$$\alpha_i^0 = \alpha_i + \psi, \quad \beta_i^0 = \beta_i + \chi, \quad i = 1,2,3,4 \quad (6)$$

Осы белгісіздерді ескере отырып, (3) және (4) формулаларды келесі түрде жазамыз:

$$Q_1^0 = -D \left\{ \frac{6}{a_1^3} W_1 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_1^0 + \frac{\nu}{a_1 a_2} \beta_1^0 - \frac{6}{a_1^3} W_2 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_2^0 - \frac{\nu}{a_1 a_2} \beta_2^0 - \right. \\ \left. - \frac{6}{a_1^3} W_3 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_3^0 + \frac{\nu}{a_1 a_2} \beta_3^0 + \frac{6}{a_1^3} W_4 + \frac{3}{a_1^2} \alpha_4^0 - \frac{\nu}{a_1 a_2} \beta_4^0 - \frac{12}{a_1^2} \psi \right\}, \quad (7)$$

$$Q_2^0 = -D \left\{ \frac{6}{a_2^3} W_1 + \frac{\nu}{a_1 a_2} \alpha_1^0 + \frac{3}{a_2^2} \beta_1^0 + \frac{6}{a_2^3} W_2 - \frac{\nu}{a_1 a_2} \alpha_2^0 + \frac{3}{a_2^2} \beta_2^0 - \right. \\ \left. - \frac{6}{a_2^3} W_3 + \frac{\nu}{a_1 a_2} \alpha_3^0 + \frac{3}{a_2^2} \beta_3^0 - \frac{6}{a_2^3} W_4 - \frac{\nu}{a_1 a_2} \alpha_4^0 + \frac{3}{a_2^2} \beta_4^0 - \frac{12}{a_2^2} \chi \right\}.$$

Осы өрнектің сол жақтарына көлденең ығысу бұрыштарын (5) енгізіп мынандай белгісіздерді

$$\begin{aligned}
m &= \frac{6}{a_1} W_1 + 3\alpha_1^0 + \frac{\nu}{m_0} \beta_1^0 - \frac{6}{a_1} W_2 + 3\alpha_2^0 - \frac{\nu}{m_0} \beta_2^0 - \frac{6}{a_1} W_3 + 3\alpha_3^0 + \\
&+ \frac{\nu}{m_0} \beta_3^0 + \frac{6}{a_1} W_4 + 3\alpha_4^0 - \frac{\nu}{m_0} \beta_4^0, \\
n &= \frac{6}{m_0 a_1} W_1 + \nu m_0 \alpha_1^0 + 3\beta_1^0 + \frac{6}{m_0 a_1} W_2 - \nu m_0 \alpha_2^0 + 3\beta_2^0 - \frac{6}{m_0 a_1} W_3 + \\
&+ \nu m_0 \alpha_3^0 + 3\beta_3^0 - \frac{6}{m_0 a_1} W_4 - \nu m_0 \alpha_4^0 + 3\beta_4^0, \\
m_0 &= \frac{a_2}{a_1}
\end{aligned} \tag{8}$$

енгізу арқылы оларды келесі түрде жазамыз:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_0} GF \cdot \psi + \frac{12\psi}{a_1^2} D &= \frac{D}{a_1^2} \cdot m, \\
\frac{1}{\mu_0} GF \cdot \chi + \frac{12\chi}{a_2^2} D &= \frac{D}{a_1^2} \cdot n.
\end{aligned} \tag{9}$$

Көлденең ығысу параметрлерін:

$$\begin{aligned}
g_1 &= \frac{\mu_0 \cdot D}{GF \cdot a_1^2 \left(1 + 12 \frac{\mu_0 \cdot D}{GF \cdot a_1^2} \right)}, \\
g_2 &= \frac{\mu_0 \cdot D}{GF \cdot a_2^2 \left(1 + 12 \frac{\mu_0 \cdot D}{GF \cdot a_2^2} \right)},
\end{aligned} \tag{10}$$

енгізу арқылы (9)-інші формуладан көлденең ығысу бұрыштарын анықтаймыз:

$$\begin{aligned}
\psi &= g_1 \cdot m, \\
\chi &= g_2 \cdot n.
\end{aligned} \tag{11}$$

Енді ақырлы элементтің майысу функциясын алу үшін (2) формуланы жаңа белгісіздер (6) арқылы жазамыз:

$$\begin{aligned}
W(x, y) &= q_1 W_1 + q_2 \alpha_1^0 + q_3 \beta_1^0 + q_4 W_2 + q_5 \alpha_2^0 + q_6 \beta_2^0 + q_7 W_3 + q_8 \alpha_3^0 + \\
&+ q_9 \beta_3^0 + q_{10} W_4 + q_{11} \alpha_4^0 + q_{12} \beta_4^0 - \psi \cdot f(x, y) - \chi \cdot \varphi(x, y), \\
f(x, y) &= q_2 + q_5 + q_8 + q_{11}, \\
\varphi(x, y) &= q_3 + q_6 + q_9 + q_{12},
\end{aligned} \tag{12}$$

мұнда $q_1 - q_{12}$ көлденең ығысуды ескермегендегі координаттық функциялар, $W_1 - \beta_4^0$ көлденең ығысуды ескергендегі түйіндік жылжулар.

Көлденең ығысу бұрыштарын (11) ескере отырып (12) өрнектен ақырлы элементтің майысу функциясын анықтайтын формуланы аламыз:

$$\begin{aligned}
 W(x, y) = & q_1^0(x, y)W_1 + q_2^0(x, y)\alpha_1^0 + q_3^0(x, y)\beta_1^0 + \\
 & + q_4^0(x, y)W_2 + q_5^0(x, y)\alpha_2^0 + q_6^0(x, y)\beta_2^0 + \\
 & + q_7^0(x, y)W_3 + q_8^0(x, y)\alpha_3^0 + q_9^0(x, y)\beta_3^0 + \\
 & + q_{10}^0(x, y)W_4 + q_{11}^0(x, y)\alpha_4^0 + q_{12}^0(x, y)\beta_4^0,
 \end{aligned} \tag{13}$$

мұнда $q_1^0(x, y) - q_{12}^0(x, y)$ ақырлы элементтің көлденең ығысуын ескергендегі координаттық функциялар. Яғни:

$$\begin{aligned}
 q_1^0(x, y) &= q_1 + \frac{6}{a_1} \left(g_1 \cdot f + \frac{g_2 \cdot \varphi}{m_0} \right), \\
 q_2^0(x, y) &= q_2 + (3g_1 - \nu m_0 g_2 \cdot \varphi), \\
 q_3^0(x, y) &= q_3 + \left(\frac{\nu g_1 \cdot f}{m_0} + 3g_2 \cdot \varphi \right), \\
 q_4^0(x, y) &= q_4 + \frac{6}{a_1} \left(-g_1 \cdot f - \frac{g_2 \cdot \varphi}{m_0} \right), \\
 q_5^0(x, y) &= q_5 + (3g_1 - \nu m_0 g_2 \cdot \varphi), \\
 q_6^0(x, y) &= q_6 + \left(-\frac{\nu g_1 \cdot f}{m_0} + 3g_2 \cdot \varphi \right), \\
 q_7^0(x, y) &= q_7 - \frac{6}{a_1} \left(g_1 \cdot f + \frac{g_2 \cdot \varphi}{m_0} \right), \\
 q_8^0(x, y) &= q_8 + (3g_1 \cdot f + \nu m_0 g_2 \cdot \varphi), \\
 q_9^0(x, y) &= q_9 + \left(\frac{\nu g_1 \cdot f}{g_1 \cdot f} + 3g_2 \cdot \varphi \right), \\
 q_{10}^0(x, y) &= q_{10} + \frac{6}{a_1} \left(g_1 \cdot f - \frac{g_2 \cdot \varphi}{m_0} \right), \\
 q_{11}^0(x, y) &= q_{11} + (3g_1 - \nu m_0 g_2 \cdot \varphi), \\
 q_{12}^0(x, y) &= q_{12} + \left(-\frac{\nu g_1 \cdot f}{m_0} + 3g_2 \cdot \varphi \right)
 \end{aligned} \tag{14}$$

(14) өрнектен $GF \rightarrow \infty$ ($g_1 \rightarrow 0, g_2 \rightarrow 0$) болған жағдайда, көлденең ығысу деформациясын ескермеген жағдайдағы нәтиже алынбақ.

Сөйтіп, көлденең ығысу деформациясы негізгі параметрлер (10) арқылы ескеріледі. Егер бұрын әдебиетте көлденең ығысуды ескергенде ақырлы элементтің белгісіздер саны 16-ға тең болса, ұсынылып отырған әдісте олар 12-ге тең болмақ. Табылған майысу функциясы белгілі координаттық функциялар $q_1(x, y) - q_{12}(x, y)$ арқылы анықталады.

Енді төртбұрышты пластинадан бөлініп алынған Клафтың ақырлы элементінің классикалық теория бойынша алынған қатаңдық матрицасын қолдана отырып, пластинаның көлденең ығысуды ескергендегі қатаңдық матрицасын алуға болады. Ол үшін төртбұрышты ақырлы элементтің негізгі тәуелділігін (2.38) қолданбақпыз.

Осы тәуелділіктің i жолын жазып аламыз:

$$\begin{aligned}
F_i &= K_{i1}W_1 + K_{i2}\alpha_1 + K_{i3}\beta_1 + K_{i4}W_2 + K_{i5}\alpha_2 + K_{i6}\beta_2 + \\
&+ K_{i7}W_3 + K_{i8}\alpha_3 + K_{i9}\beta_3 + K_{i10}W_4 + K_{i11}\alpha_4 + K_{i12}\beta_4 \\
i &= \overline{1,12}
\end{aligned} \tag{15}$$

Ескі белгісіздерді жаңа белгісіздермен (6) алмастырып, (15)-ті мына түрге келтіреміз:

$$\begin{aligned}
F_i &= K_{i1}W_1 + K_{i2}\alpha_1^0 + K_{i3}\beta_1^0 + K_{i4}W_2 + K_{i5}\alpha_2^0 + K_{i6}\beta_2^0 + \\
&+ K_{i7}W_3 + K_{i8}\alpha_3^0 + K_{i9}\beta_3^0 + K_{i10}W_4 + K_{i11}\alpha_4^0 + K_{i12}\beta_4^0 - a_i\psi - b_i\chi, \\
a_i &= K_{i2} + K_{i5} + K_{i8} + K_{i11}; \quad b_i = K_{i3} + K_{i6} + K_{i9} + K_{i12}, \\
i &= \overline{1,12}.
\end{aligned} \tag{16}$$

Көлденең ығысу бұрыштарының мәндерін (11) өрнек (16)-ға қойып, ұқсас мүшелерін жинағаннан кейін, осы өрнекті мына түрге келтіреміз:

$$\begin{aligned}
F_i &= K_{i1}^0W_1 + K_{i2}^0\alpha_1^0 + K_{i3}^0\beta_1^0 + K_{i4}^0W_2 + K_{i5}^0\alpha_2^0 + K_{i6}^0\beta_2^0 + \\
&+ K_{i7}^0W_3 + K_{i8}^0\alpha_3^0 + K_{i9}^0\beta_3^0 + K_{i10}^0W_4 + K_{i11}^0\alpha_4^0 + K_{i12}^0\beta_4^0, \\
i &= \overline{1,12}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Қатаңдық матрицасының элементтері көлденең ығысу ескерілгенде мына формулалармен анықталмақ:

$$\begin{aligned}
K_{i1}^0 &= K_{i1} + \frac{6}{a} \left(A_i + \frac{B_i}{m} \right); \quad K_{i2}^0 = K_{i2} + (3A_i + \nu m B_i); \quad K_{i3}^0 = K_{i3} + \left(\frac{\nu}{m} A_i + 3B_i \right), \\
K_{i4}^0 &= K_{i4} + \frac{6}{a} \left(-A_i + \frac{B_i}{m} \right); \quad K_{i5}^0 = K_{i5} + (3A_i - \nu m B_i); \quad K_{i6}^0 = K_{i6} + \left(-\frac{\nu}{m} A_i + 3B_i \right), \\
K_{i7}^0 &= K_{i7} - \frac{6}{a} \left(A_i + \frac{B_i}{m} \right); \quad K_{i8}^0 = K_{i8} + (3A_i + \nu m B_i); \quad K_{i9}^0 = K_{i9} + \left(\frac{\nu}{m} A_i + 3B_i \right), \\
K_{i,10}^0 &= K_{i,10} + \frac{6}{a} \left(A_i - \frac{B_i}{m} \right); \quad K_{i,11}^0 = K_{i,11} + (3A_i - \nu m B_i); \quad K_{i,12}^0 = K_{i,12} + \left(-\frac{\nu}{m} A_i + 3B_i \right), \\
A_i &= -g_1 \cdot a_i, \quad B_i = -g_2 \cdot b_i, \quad i = \overline{1,12}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Осы формулаларға қатаңдық матрицаның элементтерін қойып мынандай нәтижелер аламыз:

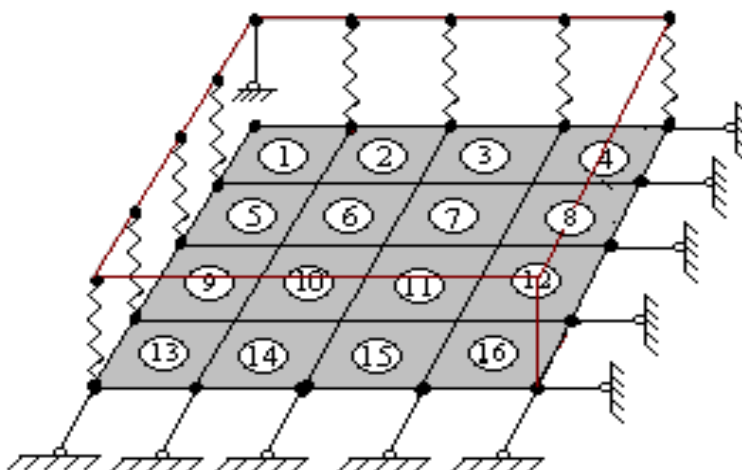
$$\begin{aligned}
A_1 &= -g_1 \frac{D}{a} (6m); \quad B_1 = -g_2 \frac{D}{a} \left(\frac{6}{m^2} \right), \\
A_2 &= -3g_1 D(m); \quad B_2 = -g_2 D(\nu), \\
K_{12}^0 &= K_{12} + (3A_1 + \nu \cdot m B_1) = K_{12} + \frac{D}{a} \left(18g_1 \cdot m + \nu g_2 \frac{6}{m} \right), \\
K_{21}^0 &= K_{21} + \frac{6}{a} \left(A_2 + \frac{B_2}{m} \right) = K_{21} + \frac{D}{a} \left(18g_1 \cdot m + \nu g_2 \frac{6}{m} \right).
\end{aligned} \tag{19}$$

Сөйтіп көлденең ығысу (10) формуласы арқылы табылатын параметрлермен ескеріледі. Бұл параметрлер тек қана қатаңдық матрицасына әсер етіп жүк векторына әсерін тигізбейді.

Нәтижелер және талқылау

Жоғарыда алынған нәтижелерді қолданып, көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаның иілуін зерттеу үшін төмендегі мысалды қарастырайық.

Бізге серпімділі тіректі төртбұрышты пластина берілген. Осы пластинаның ортасына шоғырланған күш P әсер етсін. Пластинаның симметриясын ескере отырып, оның ширек бөлігін қарастырамыз (сурет 1). Осы бөлікті 4x4 тормен жабамыз да, квадраттық жағдайда қадамды $\lambda = \frac{1}{8}$ түрінде аламыз.



Сурет 1. Есептеу сызбасы

Енді осы есепті келесі үш жағдайда зерттеп көрелік:

- 1) пластинаға шоғырланған жүктеме әсер еткендегі, серпімділі қатаң қабырғалар болмаған $\varphi = 0, \psi = 0$ кездегі және көлденең ығысуды ескермегендегі $G = 0$ шешімін аламыз.
- 2) пластинаға жайылған жүктеме әсер еткендегі, серпімділі қатаң қабырғалар болған $\varphi = 0.2, \psi = 0.2$ кездегі және көлденең ығысуды ескермегендегі $G = 0$ шешімін аламыз.
- 3) пластинаға шоғырланған жүктеме әсер еткендегі, серпімділі қатаң қабырғалар болмаған $\varphi = 0, \psi = 0$ кездегі және көлденең ығысуды ескергендегі $G = 1.14$ шешімін аламыз.

Осы серпімді тіректі пластинаның көлденең ығысу деформациясын ескергендегі деформациялық күйін зерттеп, нәтижесін алу үшін ақырлы элементтер әдісін қолданып бағдарлама құрылды. Бағдарламаның нәтижелері кестелер мен эпюралар түрінде көрсетілді.

Кесте 1

Түйіндік тік жылжулар (W)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0	0,006335	0,011638	0,015127	0,016327
6	0,006335	0,011733	0,016501	0,019781	0,020949
11	0,011638	0,016501	0,021052	0,024371	0,025599
16	0,015127	0,019780	0,024371	0,028008	0,029494
21	0,016326	0,020949	0,025599	0,029494	0,031426

Кесте 2

Түйіндік бұрылу бұрышы (α)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,051912	0,047827	0,036039	0,019163	0
6	0,043237	0,041892	0,033214	0,018380	0
11	0,037839	0,038834	0,032726	0,019134	0
16	0,035445	0,038041	0,034245	0,022241	0
21	0,035004	0,038070	0,035347	0,025894	0

Кесте 3

Түйіндік бұрылу бұрышы (β)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,051910	0,043235	0,037837	0,035444	0,035003
6	0,047825	0,041891	0,038833	0,038040	0,038069
11	0,036038	0,033213	0,032725	0,034244	0,035346
16	0,019162	0,018379	0,019133	0,022240	0,025893
21	0	0	0	0	0

Кесте 4

Түйіндік тік реакциялар (R)

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,151111	-0,003169	-0,005818	-0,007562	-0,016322
6	-0,003166	0	-0,000003	-0,000001	-0,000001
11	-0,005820	0	0,000003	0,000002	-0,000002
16	-0,007563	0	0	0	0,000002
21	-0,016326	0,000001	-0,000002	-0,000001	0,249999

Кесте 5

Түйіндік бұралу моменті (M_{xy})

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,110333	-0,079331	-0,041935	-0,013859	-0,002159
6	-0,079331	-0,050597	-0,019462	-0,001280	-0,000974
11	-0,041935	-0,019461	0,007519	0,021169	-0,001877
16	-0,013859	-0,001280	0,021169	0,047056	0,009395
21	-0,002159	-0,000975	-0,001878	0,009395	-0,039989

Кесте 6

Түйіндік иілу моменті (M_x)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,008290	-0,065565	-0,108357	-0,138019	-0,140246
6	-0,002398	-0,052931	-0,103555	-0,140308	-0,153862
11	-0,000318	-0,048493	-0,102565	-0,156547	-0,179860
16	-0,001262	-0,044420	-0,098459	-0,180885	-0,242865
21	-0,000341	-0,043833	-0,097348	-0,158438	-0,425857

Кесте 7

Түйіндік иілу моменті (M_y)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,008291	-0,002395	-0,000319	-0,001263	-0,000345
6	-0,065565	-0,052930	-0,048491	-0,044419	-0,043831
11	-0,108353	-0,103554	-0,102564	-0,098459	-0,097346
16	-0,138015	-0,140304	-0,156543	-0,180882	-0,158437
21	-0,140239	-0,153859	-0,179857	-0,242858	-0,425853

Кесте 8

Түйіндік көлденең күш (Q_x)

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,524061	-0,384590	-0,206691	-0,082736	-0,002790
6	-0,231406	-0,257294	-0,242907	-0,141580	-0,080527
11	-0,269303	-0,299063	-0,313713	-0,213539	-0,128473
16	-0,279774	-0,362568	-0,549359	-0,440101	-0,226846
21	-0,346367	-0,406518	-0,635668	-1,817515	-2,830361

Кесте 9

Түйіндік көлденең күш (Q_y)

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,524086	-0,231440	-0,269260	-0,279752	-0,346288
6	-0,384579	-0,257327	-0,299039	-0,362568	-0,406478
11	-0,206660	-0,242914	-0,313681	-0,549352	-0,635689
16	-0,082709	-0,141568	-0,213522	-0,440055	-1,817510
21	0,002830	-0,080522	-0,128501	-0,226791	-2,830310

Осы кестелер бойынша мынандай тұжырымдарды жасауға болады:

- үлкен тік жылжу 25 түйінде (кесте 1) пайда болады $W_{\max}^{25} = 0,031426 \frac{Pa^3}{D}$;
- горизонталь бағыттағы үлкен бұрыштық жылжу 1 түйінде (кесте 2) пайда болады $\alpha_{\max}^1 = 0,051912 \frac{Pa^2}{D}$;
- вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжу 1 түйінде (кесте 3) пайда болады $\beta_{\max}^1 = 0,051910 \frac{Pa^2}{D}$;
- үлкен тік реакция 25 түйінде (кесте 4) пайда болады $R_{\max}^{25} = 0,249999P$;
- үлкен бұралу моменті 1 түйінде (кесте 5) пайда болады $M_{xy(\max)}^1 = -0,110333Pa$;
- горизонталь бағыттағы үлкен иілу моменті 25 түйінде (кесте 6) пайда болады $M_{x(\max)}^{25} = -0,425857Pa$;
- вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменті 25 түйінде (кесте 7) пайда болады $M_{y(\max)}^{25} = -0,425853Pa$;
- горизонталь бағыттағы үлкен көлденең күш 25 түйінде (кесте 8) пайда болады $Q_{x(\max)}^{25} = -2,830361P$;
- вертикаль бағыттағы үлкен көлденең күш 25 түйінде (кесте 9) пайда болады $Q_{y(\max)}^{25} = -2,830310P$;

Екінші жағдай бойынша, осы есептің 21-25, 5-25 қималарында (сурет 1) серпімділі қатаң қабырғалар болған $\varphi = 0,2$, $\psi = 0,2$ кездегі, пластинаға жайылған жүктеме әсер еткендегі және көлденең ығысуды ескермегендегі $G = 0$ шешімін аламыз.

Бұл жағдайда негізгі параметрлердің үлкен мәндері тең болады:

- үлкен тік жылжу 25 түйінде пайда болады $W_{\max}^{25} = 0,016812 \frac{qa^4}{D}$;
- горизонталь бағыттағы үлкен бұрыштық жылжу 1 түйінде пайда болады $\alpha_{\max}^1 = 0,039222 \frac{qa^3}{D}$;
- вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжу 1 түйінде пайда болады $\beta_{\max}^1 = 0,039222 \frac{qa^2}{D}$;
- үлкен тік реакция 1 түйінде пайда болады $R_{\max}^1 = -0,172017qa$;
- үлкен бұралу моменті 1 түйінде пайда болады $M_{xy(\max)}^1 = -0,139023qa$;
- горизонталь бағыттағы үлкен иілу моменті 5 түйінде пайда болады $M_{x(\max)}^5 = -0,120696qa^2$;
- вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменті 21 түйінде пайда болады $M_{y(\max)}^{21} = -0,120694qa^2$;
- горизонталь бағыттағы үлкен көлденең күш 1 түйінде пайда болады $Q_{x(\max)}^1 = -0,434906qa$;
- вертикаль бағыттағы үлкен көлденең күш 1 түйінде пайда болады $Q_{y(\max)}^1 = -0,434909qa$.

Бірінші және екінші жағдайдағы алынған шешімдерді бір-бірімен салыстырып, серпімділі қатаң қабырға болған кездегі мәндердің кіші болатынын көреміз.

Үшінші жағдай пластинаға шоғырланған жүктеме әсер еткендегі, серпімділі қатаң қабырғалар болмаған $\varphi = 0$, $\psi = 0$ кездегі және көлденең ығысуды ескергендегі $G = 1,14$ шешімін аламыз.

Кесте 10

Түйіндік тік жылжулар (W)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0	0,006953	0,012905	0,017104	0,018898
6	0,006953	0,013024	0,018479	0,022520	0,024385
11	0,012905	0,018479	0,023756	0,027902	0,000057
16	0,017105	0,022520	0,027902	0,032416	0,035149
21	0,018898	0,024385	0,030057	0,035149	0,038681

Кесте 11

Түйіндік бұрылу бұрышы (α)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,049291	0,045733	0,035091	0,019218	0
6	0,041409	0,040110	0,032191	0,018393	0
11	0,036775	0,037420	0,031306	0,018592	0
16	0,035069	0,037251	0,032730	0,020380	0
21	0,035458	0,038906	0,036452	0,026066	0

Кесте 12

Түйіндік бұрылу бұрышы (β)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,049292	0,041410	0,036776	0,035070	0,035460
6	0,045734	0,040111	0,037421	0,037252	0,038908
11	0,035092	0,032192	0,031307	0,032731	0,036453
16	0,019218	0,018393	0,018593	0,020380	0,026067
21	0	0	0	0	0

Кесте 13

Түйіндік бұралу моменті (M_{xy})

Түйін	1	2	3	4	5
1	-0,097573	-0,071318	-0,038587	-0,012696	-0,002089
6	-0,071319	-0,047113	-0,020871	-0,002065	0,002336
11	-0,038587	-0,020871	-0,002934	0,009898	0,002808
16	-0,012696	-0,002064	0,009898	0,031679	0,002027
21	-0,002088	0,002336	0,002808	0,002028	-0,071537

Кесте 14

Түйіндік иілу моменті (M_x)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,009463	-0,059590	-0,101106	-0,134667	-0,136410
6	-0,001428	-0,049699	-0,097047	-0,136115	-0,152221
11	-0,000632	-0,048349	-0,099688	-0,150976	-0,173883
16	-0,000623	-0,046093	-0,100824	-0,175495	-0,230648
21	-0,004096	-0,040334	-0,094106	-0,158445	-0,430555

Кесте 15

Түйіндік иілу моменті (M_y)

Түйін	1	2	3	4	5
1	0,009464	-0,001428	-0,000634	-0,000626	-0,004093
6	-0,059592	-0,049700	-0,048348	-0,046092	-0,040337
11	-0,101107	-0,097051	-0,099690	-0,100825	-0,094106
16	-0,134670	-0,136120	-0,150980	-0,175498	-0,158448
21	-0,136418	-0,152223	-0,173888	-0,230654	-0,430560

Кесте 16

Түйіндік көлденең күш (Q_x)

Түйін	1	2	3	4	5
1	-11,854770	-11,303440	-10,263140	-8,613455	-7,452735
6	-11,268550	-11,056610	-10,574780	-9,435701	-8,566509
11	-10,865110	-11,107050	-11,634840	-11,879450	-11,838210
16	-10,407950	-11,018840	-12,576670	-15,135290	-16,746980
21	-10,432080	-11,425990	-14,043640	-19,403730	-23,140090

Осы кестелер бойынша мынандай тұжырымдарды жасауға болады:

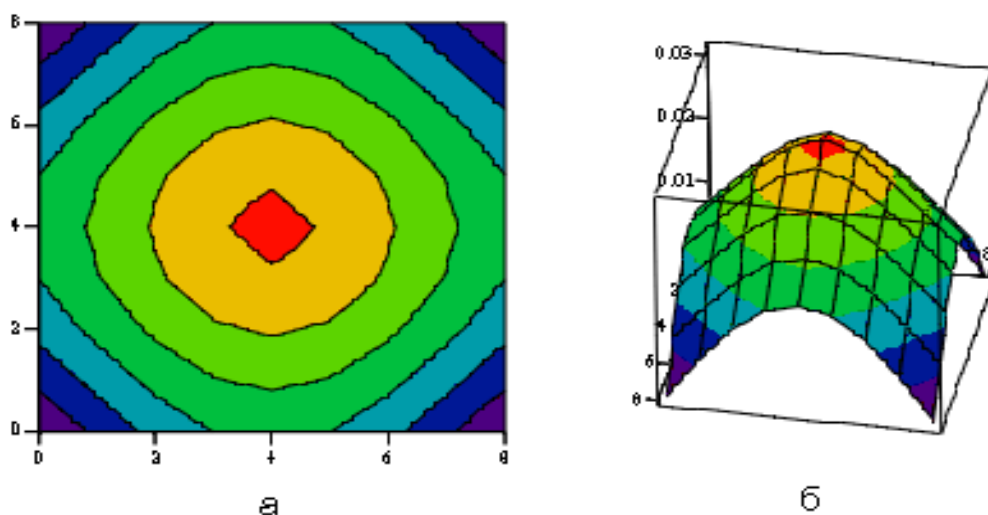
- үлкен тік жылжу 25 түйінде (кесте 10) пайда болады $W_{\max}^{25} = 0,038681 \frac{Pa^3}{D}$;
- горизонталь бағыттағы үлкен бұрыштық жылжу 1 түйінде (кесте 11) пайда болады $\alpha_{\max}^1 = 0,049291 \frac{Pa^2}{D}$;
- вертикаль бағыттағы үлкен бұрыштық жылжу 1 түйінде (кесте 12) пайда болады $\beta_{\max}^1 = 0,049292 \frac{Pa^2}{D}$;
- үлкен бұралу моменті 1 түйінде (кесте 13) пайда болады $M_{xy(\max)}^1 = -0,097573Pa$;
- горизонталь бағыттағы үлкен иілу моменті 25 түйінде (кесте 14) пайда болады $M_{x(\max)}^{25} = -0,430555Pa$;

- вертикаль бағыттағы үлкен иілу моменті 25 түйінде (кесте 15) пайда болады $M_{y(\max)}^{25} = -0,430560Pa$;

- горизонталь бағыттағы үлкен көлденең күш 25 түйінде (кесте 16) пайда болады $Q_{x(\max)}^{25} = -23,140090P$;

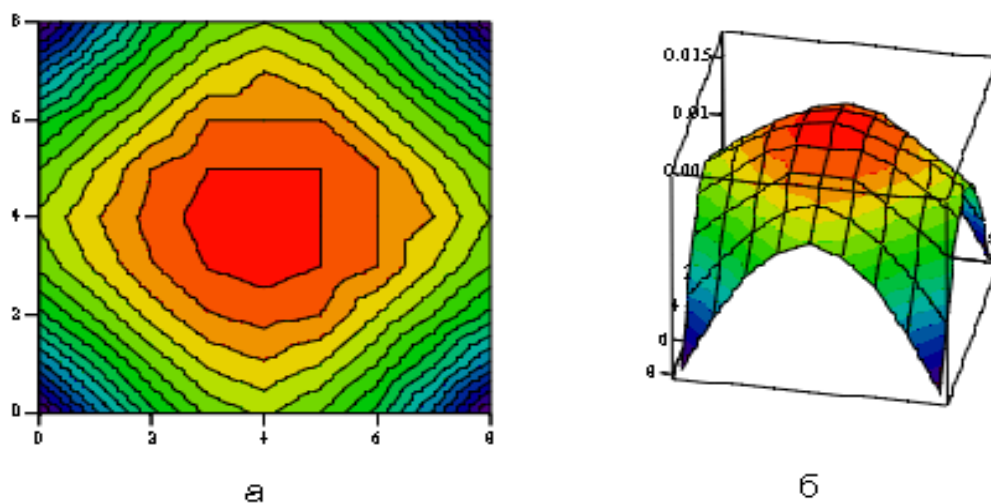
Нәтижесінде алдыңғы екі жағдай мен көлденең ығысуды ескергендегіні салыстырып, майысудың өсетінін көреміз.

Енді осы үш жағдайды Mathcad программасында толық пластинаға салып, майысу функциясын график түрінде көрсетейік:



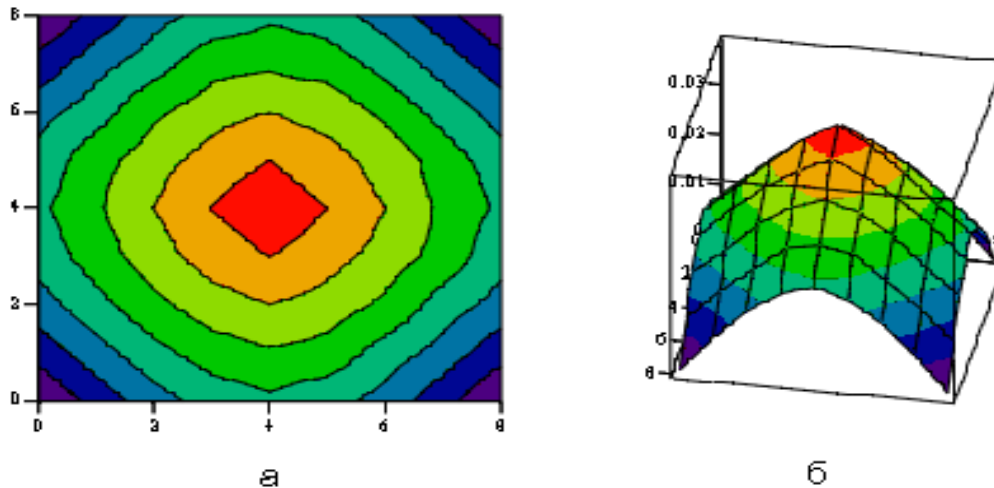
а – изолиния, б – эпюра

Сурет 2. Бірінші жағдайдағы майысу функциясы W



а – изолиния, б – эпюра

Сурет 3. Екінші жағдайдағы майысу функциясы W



а – изолиния; б – эпюра

Сурет 4. Үшінші жағдайдағы майысу функциясы W

Сөйтіп, алынған нәтижелер арқылы көлденең ығысу деформациясын ескергендегі серпімді тіректі төртбұрышты пластинаның иілу есебінің шешімін толық түрде алуға болады.

Қорытынды

Ұсынылып отырған мақалада ақырлы элементтер әдісін қолданып, көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаның жетілдірілген есептеу теориясы алынды. Классикалық теорияда қарастырылмайтын көлденең ығысу деформациясы, ақырлы элементтің түйіндеріндегі жылжулар арқылы еркіндік дәрежесін көтермей ақ ескерілді. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі пластинаның ақырлы элементі және қатаңдық матрицасы табылды. Шешуші теңдеулер жүйесі толығымен автоматтандырылды.

Мысал түрінде серпімді тіректі пластинаның көлденең ығысу деформациясын ескергендегі деформациялық күйі зерттелді. Есептеу нәтижелері кестелер және эпюралар түрінде көрсетілді.

Пайдаланылған әдебиеттер

1. Kirchhoff G.R. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen schein // Journal für die reine und angewandte Mathematik. – 1850. – Vol. 40. – P. 51-88.
2. Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates // Journal of Applied Mechanics. – 1945. – Vol. 12. – P. 69-72.
3. Mindlin R.D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // Journal of Applied Mechanics. – 1951. – Vol. 18. – P. 31-38.
4. Soldatos K.P. A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates // Acta Mechanica. – 1992. – Vol. 94. – P. 195-220.
5. Mantari J.L., Guedes Soares C. Generalized hybrid quasi 3D shear deformation theory for the static analysis of advanced composite plates // Composite Structures. – 2012. – Vol. 94. – P. 2561-2575.
6. Thai H.T., Choi D.H. A simple first order shear deformation theory for laminated composite plates // Composite Structures. – 2013 – Vol. 106. – P. 754-763.
7. Thai H.T., Kim S.E. A simple higher order shear deformation theory for bending and free vibration analysis of functionally graded plates // Composite Structures. – 2013. – Vol. 96. – P. 165-173.
8. Mantari J.L., Granados E.V. A refined FSDT for the static analysis of functionally graded sandwich plates // Thin Walled Structures. – 2015. – Vol. 90. – P. 150-158.

9. Ghugal Y.M., Shimpi R.P. A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates // Journal of Reinforced Plastics and Composites. – 2002. – Vol. 21. – P. 775-813.
10. Thai H.T., Kim S.E. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells // Composite Structures. – 2015. – Vol. 128. – P. 70-86.
11. Zienkiewicz O.C, Taylor R.L, Zhu J.Z. The finite element method: Its basis and fundamentals. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2005. – 752 p.

С.Б. Ахажанов¹, А.Ж. Нургозиева²

¹Карагандинский университет Букетова, Караганда, Казахстан

²Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан

Метод расчета упругой пластины с учетом деформаций поперечного сдвига

Аннотация. В статье представлен усовершенствованный конечный элемент пластины с учетом деформаций поперечного сдвига. Деформация поперечного сдвига учитывается с помощью параметров. Найдены основная зависимость и матрица жесткости конечного элемента пластины с учетом деформаций поперечного сдвига с использованием метода конечных элементов. Координатные функции четырехугольного конечного элемента определены с учетом деформаций поперечного сдвига. Произведен автоматизированный расчет пластины с использованием метода конечных элементов. В качестве примера показан изгиб упругой пластины с учетом деформаций поперечного сдвига. Получены численные результаты узловых вертикальных перемещений, углов поворота, изгибающих моментов, крутящего момента и поперечных усилий упругой пластины в трех случаях. Результаты решения в трех случаях упругой пластины, сравниваются между собой. Результаты расчетов представлены в таблицах и эпюрах.

Ключевые слова: пластина, конечный элемент, деформация поперечного сдвига, параметр поперечного сдвига, функция прогибов.

S.B. Akhazhanov¹, A.Zh. Nurgoziyeva²

¹Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan

²al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

The calculation method for an elastic plate with transverse shear deformation

Abstract. The article presents an improved plate finite element, taking into account transverse shear deformation. The transverse shear deformation is taken into account using parameters. The main dependence and the stiffness matrix of the finite element of the plate are found, taking into account the transverse shear deformations using the finite element method. The coordinate functions of a quadrilateral finite element are determined taking into account transverse shear deformation. An automated calculation of the plate was made using the finite element method. As an example, the bending of an elastic plate is shown, taking into account the deformations of the transverse shear. Numerical results of nodal vertical displacements, rotation angles, bending moments, torque, and transverse forces of an elastic plate are obtained in three cases. The results of the solution in three cases of an elastic plate are compared with each other. The calculation results are presented in tables and epures.

Keywords: plate, finite element, transverse shear deformation, transverse shear parameter, deflection function.

Авторлар туралы мәлімет:

Ахажанов С.Б. – PhD, Т.Ф. Мұстафин атындағы алгебра, математикалық логика және геометрия кафедрасының қауымдастырылған профессоры, Қарағанды Бөкетов университеті, Қарағанды, Қазақстан.

Нургозиева А.Ж. – Механика кафедрасының докторанты, әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан.

Akhazhanov S.B. – Ph.D., Associate Professor of the Department of Algebra, Mathematical Logic and Geometry named after T.G. Mustafin, Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan.

Nurgoziyeva A.Zh. – Ph.D. student of the Department of Mechanics, Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.