



МРНТИ 55.03.07

Научная статья

<https://doi.org/10.32523/2616-7263-2025-152-3-184-200>

Аналитический подход к расчёту динамических характеристик и маховика шестизвенного механизма кривошипного пресса

А.К. Тулешов ¹, М.Ж. Куатова ^{1,2}, А.Т. Хабиев¹ ,
Б.М. Меркибаева ¹

¹Институт механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова, Алматы, Казахстан

²Международный инженерно-технологический университет, Алматы, Казахстан

E mail: Kuatova.moldyr@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается методика динамического проектирования гибридного кривошипного пресса на базе шестизвенного механизма Стефенсона, активно применяемого в современных сервопрессах. Проведен подробный анализ коэффициента неравномерности движения, характеристик возмущающего момента, а также методика определения момента инерции маховика и средней скорости установившегося режима. Показано, что при грамотном выборе этих параметров базисное звено может играть роль встроенного противовеса, значительно снижая неравномерность вращения и динамические ошибки механизма. Это позволяет сократить требования к массе маховика, что особенно важно при проектировании энергоэффективных машин. В работе используется аналитический подход с применением методов математического моделирования. Разработаны алгоритмы решения дифференциальных уравнений движения и проведена оценка динамических ошибок. Полученные формулы и численные данные подтверждают эффективность предложенной методики и демонстрируют её практическую применимость. Метод особенно полезен для предварительного проектирования прессов, обеспечивая учет энергетических и вибродинамических характеристик на ранних этапах проектирования. Результаты работы могут быть использованы при создании интеллектуальных приводных систем штамповочного оборудования.

Ключевые слова: кривошипный пресс, шестизвенный механизм, маховик, виброактивность, динамическая ошибка, численное моделирование.

Поступила 18.07.2025. Доработана 30.08.2025. Одобрена 06.09.2025. Доступна онлайн 30.09.2025

* автор для корреспонденции

Введение

Актуальность данной работы определяется возрастающим интересом к энергоэффективным и устойчивым приводным системам, а также необходимостью учета вибродинамических характеристик на ранних этапах проектирования. Объектом исследования является кривошипный пресс, построенный на базе шестизвенного механизма Стефенсона. Предметом исследования выступают динамические параметры и характеристики работы механизма.

В рамках настоящей работы рассмотрены исследования, связанные с анализом механизмов типа Стефенсона, включая труды по их кинематике, динамике и компьютерному моделированию. Наиболее существенный вклад внесли работы, посвящённые оптимизации структурных параметров для обеспечения устойчивости и точности движения. При этом выявлены пробелы в части учета динамической характеристики привода, особенно при использовании сервомоторов в качестве источника движения. Недостаточно изученным остается вопрос влияния массы и геометрии базисного звена на инерционные характеристики и, как следствие, на неравномерность вращения. Это и обуславливает необходимость разработки новой методики, сочетающей аналитический подход и практическое моделирование.

Обзор литературы. Кривошипный пресс-автомат проектируется на основе шестизвенного кривошипно-ползунного механизма Стефенсона [1]. Такие механизмы, особенно схема Стефенсона II с двумя шатунными тягами, всё чаще применяются в современных сервопрессах для повышения точности и устойчивости работы ползуна при переменных нагрузках [2]. Это позволяет добиться более равномерного распределения усилий и сократить перекосы, особенно при эксцентричном расположении нагрузки [3].

Технологический процесс штамповки сопровождается преодолением значительных переменных сил, что приводит к импульсным динамическим нагрузкам на звенья и приводной двигатель [4]. Существенное влияние на динамику пресса оказывает внутренняя виброактивность рычажного механизма, вызванная инерционными силами и моментами, а также ударными нагрузками [5,6]. Дополнительными источниками динамических ошибок служат трение и зазоры в сочленениях, упругие свойства звеньев, а также свойства обрабатываемого материала [7,8].

Особое внимание в современных исследованиях уделяется коэффициенту неравномерности движения, который отражает отклонения угловой скорости ведущего звена от среднего значения и оказывает влияние на надёжность и точность работы всего механизма. Согласно [9], подбор момента инерции маховика с учётом энергетических характеристик существенно снижает неравномерность вращения в циклических машинах. В этом контексте становится актуальной задача оптимального расчёта маховика, его размещения и соотношения с массой подвижных звеньев.

Одним из направлений снижения вибрационной активности является динамическое уравнивание механизмов. Современные методы, основанные на многокритериальной оптимизации (например, алгоритм дифференциальной эволюции), позволяют эффективно минимизировать силы и моменты раскачки шестизвенных механизмов [10].

Моделирование динамики нового пресса с учетом этих факторов представляет сложную, актуальную задачу. Вместе с тем для широкого применения кривошипных прессов на базе этих механизмов необходимо разработать простые и понятные методы

динамического проектирования для конструктора. При проектировании механизмов машин путем математического моделирования определяют значения постоянных динамических параметров: среднюю скорость установившегося режима цикловых машин; коэффициент неравномерности хода; момент инерции маховика и т.п. Тем самым на стадии предварительного проектирования определяют эти параметры, чтобы наилучшим образом приблизиться к реальному технологическому режиму машины. Динамические ошибки, возникающие при переходных режимах, отклонениях от стационарного вращения и ударных нагрузках, требуют точного учёта в математических моделях. Численные методы решения дифференциальных уравнений, моделирование в средах SimulationX, Matlab/Simulink и MSC Adams активно применяются для анализа таких систем [11,12].

Современные публикации подтверждают эффективность применения механизма Стефенсона II в сервопрессах. В работах авторов [2,13,14] показано, что данная конструкция обеспечивает более точную технологическую выдержку, снижает отклонения движения ползуна и улучшает стабильность при эксцентричных нагрузках. Кроме того, выявлено, что форма и масса базисного звена могут быть использованы как средство компенсации неравномерности вращения, снижая тем самым необходимость в установке массивного маховика [15]. В данной работе предлагается комплексный подход динамического проектирования кривошипного пресса на базе механизма Стефенсона, основанный как на известных методах [4,5,15].

Методология

В настоящей работе рассматривается метод динамического исследования виброактивности шестизвенного исполнительного механизма кривошипного пресса, анализ коэффициента неравномерности движения, методика определения момента инерции маховика, который обеспечивает устойчивость равномерного вращения входного вала машины.

Уравнение динамики шестизвенного механизма (рисунок 1) запишем в следующем виде [14, 16]

$$J_{\text{пр}}(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}J'_{\text{пр}}(\varphi)\dot{\varphi}^2 = i_{\text{пм}}M_D(\dot{\varphi}/i_{\text{пм}}) + M_C(\varphi) \quad (1)$$

Отметим, что в уравнении (1) пренебрегается масса параллельных шатунов 3 и 4 по сравнению массой ползуна 5.

С учетом кинематических соотношений между координатами механизма [12] приведенные динамические параметры уравнения (1) будут записаны в виде:

$$\begin{aligned} J_{\text{пр}}(\varphi) &= J_O + m_5(r^2 \cos^2 \varphi + 2rl \cdot P'_\psi(\varphi) \cos \varphi \cos \psi + l^2 P''_\psi(\varphi) \cos^2 \psi), \\ \frac{1}{2}J'_{\text{пр}}(\varphi) &= -m_5 r \sin \varphi (r \cos \varphi + l \cdot P'_\psi(\varphi) \cos \psi) - m_5 l (r \cos \varphi + l P'_\psi(\varphi) \cos \psi) \cdot \\ &\quad \left[-(P'_\psi)^2 \sin \psi + P''_\psi \cos \psi \right], \\ M_{\text{пр}} &= i_{\text{пм}} M_D + r[G_5 + G_2 - F_5(\varphi)] \cos \varphi + l P'_\psi(\varphi)[G_5 - F_5(\varphi)] \cos \psi(\varphi), \\ M_C(\varphi) &= r[G_5 + G_2 - F_5(\varphi)] \cos \varphi + l P'_\psi(\varphi)[G_5 - F_5(\varphi)] \cos \psi(\varphi), \end{aligned} \quad (2)$$

где передаточные отношения

$$\cos \psi = -\frac{r \cos \varphi}{l} \text{ и } S = a + r \sin \varphi \pm \sqrt{l^2 - r^2 \cos^2 \varphi},$$

$$\begin{aligned} \Pi'_\psi(\varphi) &= \psi' = -\frac{r \sin \varphi}{l \sin \psi}, \sin \psi \neq 0, \psi \neq 0, k\pi, k = 1, 2, 3, \dots \\ \Pi'_S(\varphi) &= S' = r \cos \varphi + l \cdot \Pi'_\psi(\varphi) \cos \psi, \\ \Pi''_\psi(\varphi) &= \psi'' = -\frac{1}{\sin \psi} \left[\frac{r}{l} \cos \varphi - (\Pi'_\psi)^2 \cos \psi \right], \sin \psi \neq 0, \psi \neq 0, k\pi, k = 1, 2, 3, \dots \\ \Pi''_S(\varphi) &= S'' = -r \sin \varphi - l \cdot (\Pi'_\psi)^2 \sin \psi + l \cdot \Pi''_\psi \cos \psi. \end{aligned} \quad (3)$$

M_D - движущий момент приложен на ведущем звене, J_D - момент инерции ротора, $F_5(S)$ - технологическая сила деформирования поковки двигателя, приложенная к ползуну. При этом будем учитывать, что звено 2 совершает поступательное движение, характер движения звеньев 3 и 4 совпадают. Пусть J_1 момент инерции кривошипа, m_2 - масса звена 2, m_5 - масса ползуна 5. Для этого механизма J_1 , - моменты инерций кривошипа относительно осей вращения (кривошип уравновешен), $i_{\text{пм}}$ - передаточное число передаточного механизма (редуктора).

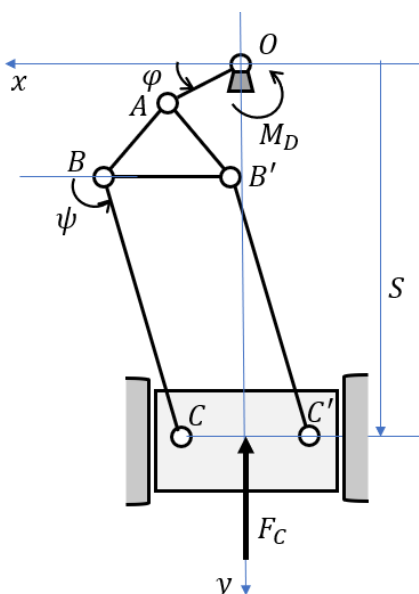


Рисунок 1. Кривошипный механизм пресс-автомата

Активной движущей силой сервопривода является движущий момент силы M_D электродвигателя: $M_D = f(\dot{M}_D, \dot{\varphi}, U)$. Если учитывать, что в кривошипном прессе используются двигатели постоянного тока, то динамическую характеристику можно записать следующим образом [12, 15]:

$$\tau \dot{M}_D + M_D = \mu U - s\omega, \quad (4)$$

где $\tau = LR^{-1}$ - электромагнитная постоянная времени, L - индуктивность, R - сопротивление, $\mu = k\Phi/R$ и $s = (k\Phi)^2/R$ - крутизна статической характеристики. Также имеет место равенство $U = k\Phi\omega$, которое определяет зависимость управления от скорости вала двигателя, Φ - магнитный поток, k - коэффициент, зависящий от некоторых

параметров двигателя. В решении задач динамики привода полезным является зависимость $\omega = \frac{\mu U}{s} - \frac{M_D}{s}$.

Таким образом получаем систему дифференциальных уравнений (1) и (4), содержащих две неизвестные функции $M_D(t)$ и $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} J_{\text{пр}}(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}J'_{\text{пр}}(\varphi)\dot{\varphi}^2 &= i_{\text{пм}}M_D(\dot{\varphi}/i_{\text{пм}}) + M_C(\varphi), \\ \tau\dot{M}_D + M_D &= \mu U - s\omega \end{aligned} \quad (5)$$

Кривошипный пресс-автомат относится к цикловым машинам, и рабочий процесс в таких машинах осуществляется в установившемся режиме [4,15]. Обычно в установившемся режиме функция управления является постоянной величиной:

а) $U = u_0 = \text{const}$. При этом в кривошипной машине устанавливается периодическое движение, при котором угловая скорость ротора остается близкой к некоторому среднему значению $\omega = \omega_0$:

$$\dot{\varphi}(t) = \omega_0 + \dot{\psi}(t), \text{ причем } |\dot{\psi}|_{\text{max}} \ll \omega_0. \quad (6)$$

в) установившееся движение при $U = u_0 = \text{const}$. Уравнение (1) в этих условиях имеет вид

$$J_{\text{пр}}(\varphi)\ddot{\varphi} + \frac{1}{2}J'_{\text{пр}}(\varphi)\dot{\varphi}^2 = i_{\text{пм}}M_D(u_0, \dot{\varphi}/i_{\text{пм}}) + M_C(\varphi) \quad (7)$$

Или

$$J_0\ddot{\varphi} - i_{\text{пм}}M_{Ds}\left(u_0, \frac{\dot{\varphi}}{i_{\text{пм}}}\right) = -\tilde{J}_{\text{пр}}(\varphi)\ddot{\varphi} - \frac{1}{2}J'_{\text{пр}}(\varphi)\dot{\varphi}^2 + M_C(\varphi), \quad (8)$$

где периодическая функция $J_{\text{пр}}(\varphi)$ из (2) по φ разложена на постоянные и переменные составляющие $J_{\text{пр}}(\varphi) = J_0 + \tilde{J}_{\text{пр}}(\varphi)$ [7]: $\tilde{J}_{\text{пр}}(\varphi) = m_5(r^2 \cos^2 \varphi + 2rl \cdot P'_\psi(\varphi) \cos \varphi \cos \psi + l^2 P''_\psi(\varphi) \cos^2 \psi)$.

Задача 1. На основе уравнении (8) строится алгоритм решения путем последовательных приближений [8, 16]

$$\begin{aligned} J_0\ddot{\varphi}^k - i_{\text{пм}}M_{Ds}\left(u_0, \frac{\dot{\varphi}^k}{i_{\text{пм}}}\right) &= -\tilde{J}_{\text{пр}}(\varphi^{k-1})\ddot{\varphi}^{k-1} \\ -\frac{1}{2}J'_{\text{пр}}(\varphi^{k-1})(\dot{\varphi}^{k-1})^2 + M_C(\varphi^{k-1}), &k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (9)$$

На основе численного метода решения дифференциального уравнения второго порядка (9) построить алгоритм решения уравнении (9) в промежутке $[\varphi^{k-1}, \varphi^k]$.

Сходимость оценивается по допустимой разнице двух последовательных приближений:

$$|\varphi^k - \varphi^{k-1}|_{\text{max}} \leq \delta_\varphi, \text{ где } \delta_\varphi - \text{малое число.} \quad (10)$$

В налаженных цикловых машинах бывает достаточным первое приближение моделирования [8, 14].

Задача 2. Определение скорости ω_0 . Пусть выполняется $u_0 = const$ и $\omega = \omega_0 = const$. Нулевое приближение ($k=0$) $\varphi^0 = \omega_0 t$ для любого t на основании (9) удовлетворяет уравнению

$$i_{\text{пм}} \left(\mu u_0 - s \frac{\omega_0}{i_{\text{пм}}} \right) = \frac{1}{2} J'_{\text{пр}}(\varphi^0) \omega_0^2 - M_c(\varphi^0), \varphi^0 \in [0, 2\pi] \quad (11)$$

или

$$\omega_0^2 + p \omega_0 + d = 0, \quad (12)$$

где $p = \frac{2ns}{\sum J'_{\text{пр}}(\varphi^0)}$, $d = -\frac{2}{\sum J'_{\text{пр}}(\varphi^0)} [ni_{\text{пм}}\mu u_0 + \sum M_c(\varphi^0)]$ и n – общее число положений кривошипа.

Решение уравнения (12) имеет вид

$$(\omega)_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - d}, \quad (13)$$

где $\frac{p^2}{4} \geq d$, так как нас интересуют действительные корни уравнения (12), которое выполняется

$$\left(\frac{ns}{\sum J'_{\text{пр}}(\varphi^0)} \right)^2 + \frac{2}{\sum J'_{\text{пр}}(\varphi^0)} [ni_{\text{пм}}\mu u_0 + \sum M_c(\varphi^0)] > 0, \quad (14)$$

Из двух корней

$(\omega)_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - d}$, $(\omega)_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - d}$, следует принять скорость, близкую по абсолютному значению к $\omega_H = \omega_{DH}/i_{\text{пм}}$, ω_{DH} – номинальная скорость сервопривода.

Задача 3. На примере кривошипного пресс-автомата алгебраическое уравнение (17) позволяет определить угловую скорость ω_0 установившегося режима машины [4,8] или значение функции управления $u = u_0$, которое соответствует заданному значению ω_0 [15]. Последнюю задачу важно решать при использовании асинхронного сервопривода.

Определение динамических ошибок. В первом приближении ($k=1$), согласно уравнению (202), имеем следующее уравнение движения:

$$J_0 \ddot{\varphi}^{(1)} - i_{\text{пм}} M_{Ds} \left(u_0, \frac{\dot{\varphi}^{(1)}}{i_{\text{пм}}} \right) = L(t), \quad (18)$$

где $L(t) = -\frac{1}{2} \tilde{J}'_{\text{пр}}(\omega_0 t) (\omega_0)^2 + \tilde{M}_c(\omega_0 t)$ – возмущающий момент [16], характеризующий внутреннюю виброактивность рабочего механизма.

Если ввести новую переменную $\psi = \varphi^{(1)} - \omega_0 t$ с учетом $\dot{\psi} = \dot{\varphi}^{(1)} - \omega_0$ и $\ddot{\psi} = \ddot{\varphi}^{(1)}$ на основании (18) получится линейное дифференциальное уравнение вида [4]

$$J_0 \ddot{\psi} + s\dot{\psi} = L(t), \quad (19)$$

где $s = -\frac{dM_{Ds}}{d\varphi(\omega_0)}$ – крутизна статической характеристики двигателя.

Причиной неравномерности вращения ротора двигателя в установившемся режиме является внутренняя виброактивность механической системы, обусловленная явной зависимостью приведенного момента инерции и приведенного момента сил сопротивления от входного параметра φ . Такое явление характерно рычажным кривошипным пресс-автоматам. Кроме того, в кривошипном пресс-автомате возникают скачки возмущающего момента, вызванные ударными процессами.

Задача 4. На примере кривошипного пресс-автомата необходимо построить характеристику возмущающего момента $L(t)$, решить уравнение (19), которое позволяет построить решения $\psi(t)$ и $\dot{\psi}(t)$ – динамических ошибок по координате и скорости.

Определение момента инерции маховика. Известно [4,15], что уменьшение неравномерности вращения, или динамических ошибок при установившемся режиме машины, возможно путем увеличения постоянной составляющей приведенного момента инерции за счет дополнительной массы (маховика), присоединенной к ротору двигателя или на входном валу рабочего механизма.

Это видно из решения уравнения (19), полученного в работе [15], которую можно записать применительно к нашему механизму

$$\psi = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{L_l \cos(lvt + \alpha_l + \delta_l)}{lv \sqrt{J_0^2 l^2 v^2 + (s + \vartheta)^2}}; \quad \dot{\psi} = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{L_l \sin(lvt + \alpha_l + \delta_l)}{\sqrt{J_0^2 l^2 v^2 + (s + \vartheta)^2}}, \quad (20)$$

где $\alpha_l = \frac{L_l}{lv \sqrt{J_0^2 l^2 v^2 + (s + \vartheta)^2}}$ – амплитуда l -ой гармоники решения уравнения (19); $\delta_l = \tan^{-1} \frac{s + \vartheta}{J_0 lv} + \pi$ – начальная фаза решения; возмущающая сила $L(t)$ разложена в ряд Фурье $L(t) = \sum_{l=1}^{\infty} L_l \cos(lvt + \alpha_l)$.

Постоянная часть J_0 приведенного момента инерции $J_{пр}(\varphi)$ (3) находится в знаменателе уравнения (20), видно, что увеличение J_0 приводит к уменьшению динамических ошибок (20).

Теперь обратим внимание на особенности нашего механизма. В рассматриваемом механизме базисное звено совершает поступательное движение и момент инерции этого звена относительно неподвижного центра O равен:

$$J_{2,0} = m_2(y_{s_2}'^2 + x_{s_2}'^2), \quad (21)$$

где учетом (5) для равностороннего треугольника $(y_{s_2}'^2 + x_{s_2}'^2) = r^2 + \frac{4a^2}{9} - \frac{4}{3}ar \sin \varphi$. Если форму базисного звена выбрать так, чтобы центр S_2 совпал с шарниром A и будет $a = 0$ (смещение), то момент инерции (21) будет постоянным (рисунок 3).

Тогда постоянная часть J_0 приведенного момента инерции $J_{пр}(\varphi)$ (3) будет увеличена на $J_{2,0}$, т.е.

$$J_{пр}(\varphi) = i_{пм}^2 J_D + J_1 + J_{2,0} + 2m_3(y_{s_3}'^2 + x_{s_3}'^2) + 2J_3\dot{\psi}^2 + m_5 S_5'^2 = J_0 + \tilde{J}_{пр}(\varphi), \quad (22)$$

где $J_0 = i_{\text{пм}}^2 J_D + J_1 + J_{2,0} = \text{const.}$

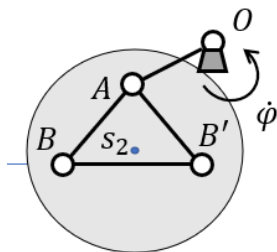


Рисунок 2. К расчету момента инерции маховика

Это значит, что не будет необходимости установки отдельного маховика на оси вращения ротора или кривошипа рабочего механизма, по крайней мере, массу маховика можно намного уменьшить за счет массы базисного звена. Теперь определим массу m_2 звена 2, который будет играть роль и определять значения массы маховика.

Первый способ. В работах [4,15] получено условие, что каждая из амплитуд $M_{\text{пл}}$, момент силы, возникающий в передаточном механизме, гармоник $\tilde{M}_{\text{п}}$ меньше амплитуды соответствующей гармоник L_l в $\tilde{L}$, поскольку $\vartheta > 0$

$$\left(\frac{M_{\text{пл}}}{L_l}\right)^2 = \frac{s^2 + J_D^2 l^2 v^2}{(s + \vartheta)^2 + J_0^2 l^2 v^2} < 1, \quad (23)$$

в силу того, что $s + \vartheta > s$ и $J_0 > J_D$.

В нашем случае $J_0 = i_{\text{пм}}^2 J_D + J_1 + J_{2,0} = J_{01} + J_{2,0}$, подставляя это в уравнение (23), получим

$$\left(\frac{M_{\text{пл}}}{L_l}\right)^2 = \frac{s^2 + J_D^2 l^2 v^2}{(s + \vartheta)^2 + (J_{01} + J_{2,0})^2 l^2 v^2}, \quad (24)$$

Найдем значение $J_{2,0}$, при котором достигается минимум функции (24). Приравняв к нулю производную с правой части уравнения (24) по $J_{2,0}$ получаем, что минимум достигается при

$$\frac{2(s^2 + J_D^2 l^2 v^2) l^2 v^2 (J_{01} + J_{2,0})}{[(s + \vartheta)^2 + (J_{01} + J_{2,0})^2 l^2 v^2]^2} = 0. \quad (25)$$

Отсюда имеет место $m_2 = -(i_{\text{пм}}^2 J_D + J_1)/r^2$. Знак «-» означает, что m_2 должен играть роль противовеса на кривошипе рабочего механизма.

Второй способ. Чтобы уменьшить динамические ошибки и динамические нагрузки при установившемся движении кривошипной машины, найдем значения дополнительной массы (момент инерции маховика), которая устанавливается на входном валу передаточного механизма на стороне двигателя. Тогда моменты инерции J_0 и J_D приобретают значения $J_0^* = J_{M0} + J_{Mx}$ и $J_D^* = J_D + J_{Mx}$, где $J_{M0} = J_1 + J_{2,0}$, поставив эти

значения (24) получим [4,15]

$$\left(\frac{M_{pl}}{L_l}\right)^2 = \frac{s^2 + (J_D + J_{Mx})^2 l^2 v^2}{(s + \vartheta)^2 + (J_{M0} + J_{Mx})^2 l^2 v^2}, \quad (26)$$

Из условия минимума (26) по J_{Mx} позволяет получить решение относительно момента инерции маховика [4,15]

$$J_{Mx} = -J_D + \frac{1}{2\omega^2 J_{M0}} \left[-(2s\vartheta + \vartheta^2 + J_{M0}^2 \omega^2) + \sqrt{(2s\vartheta + \vartheta^2 + \omega^2 J_{M0}^2)^2 + 4\omega^2 s^2 J_{M0}^2} \right], \quad (27)$$

где $\omega^2 = l^2 v^2$.

Если крутизна среднего момента сил сопротивления $\vartheta = 0$, то это выражение упрощается

$$J_{Mx} = -J_D - \frac{J_{M0}}{2} + \sqrt{\frac{J_{M0}^2}{4} + \frac{s^2}{\omega^2}}. \quad (28)$$

б) установившееся движение, связанное с изменением нагрузки. Чтобы обеспечить постоянство (стабилизацию) угловой скорости $\omega = \omega_0 = const$ необходимо изменять управление $u = u_{зд}(\omega)$, как это имеет место в асинхронных сервоприводах. В этом случае момент нагрузки на двигателе изменяется по времени и уравнение отличается от статической характеристики наличием в левой части слагаемого $\tau \dot{M}_D$ и может быть представлено в виде (12).

В этом случае уравнение динамики кривошипного пресс-автомата записывается в виде

$$J_0 \ddot{\varphi} - i_{пм} M_{Ds} \left(u, \frac{\dot{\varphi}}{i_{пм}} \right) - M_{C0}(\dot{\varphi}) = -\tilde{J}_{пр}(\varphi) \ddot{\varphi} - \frac{1}{2} \tilde{J}'_{пр}(\varphi) \dot{\varphi}^2 + \tilde{M}_C(\varphi, \dot{\varphi}), \quad (29)$$

$$\tau \dot{M}_D + M_D - M_{Ds} \left(u, \frac{\dot{\varphi}}{i_{пм}} \right) = 0, \quad u = u_{зд}(\omega). \quad (30)$$

При отсутствии возмущений, характеризуемых членами, стоящими в правой части уравнения (16), рассматриваемая система имела бы стационарное решение вида

$$\varphi = \omega_0 t, \quad M_D = M_0 = const \quad (31)$$

Если возмущение остается близким к режиму равномерного вращения $|\psi|_{max} \ll \omega_0$, а движущий момент мало отличается от постоянного, тогда для решения системы (29) и (30) можно также применить метод последовательных приближений [4,15]. Нулевое приближение, как в предыдущем случае, используется для определения средней скорости ω_0 . Поставив значения переменных нулевого приближения в правую часть уравнения (29), получим систему уравнений для определения в первом приближении $\varphi = \varphi(t)$ и $M_D = M_D(t)$:

$$J_0 \ddot{\varphi}^{(1)} - i_{пм} M_{Ds} \left(u_0, \frac{\dot{\varphi}^{(1)}}{i_{пм}} \right) - M_{C0}(\dot{\varphi}^{(1)}) = L(t), \quad (32)$$

$$\dot{M}_D^{(1)} + M_D^{(1)} - M_{Ds} \left(u_0, \frac{\dot{\varphi}^{(1)}}{i_{\text{пм}}} \right) = 0, \quad u_0 = u_{\text{зд}}(\omega_0)$$

где $L(t) = -\frac{1}{2}\tilde{J}'_{\text{пр}}(\omega_0 t)(\omega_0)^2 + \tilde{M}_c(\omega_0 t, \omega_0)$ – возмущающий момент [6].

Если ввести новую переменную $\varphi^{(1)} - \omega_0 t = \psi(t)$ и $M_D^{(1)} - M_0 = \mu(t)$ с учетом $\dot{\psi} = \dot{\varphi}^{(1)} - \omega_0$ и $\ddot{\psi} = \ddot{\varphi}^{(1)}$ на основании (32), получатся дифференциальные уравнения вида [4,15]

$$J_0 \ddot{\psi} + \vartheta \dot{\psi} - \mu = L(t),$$

$$\tau \dot{\mu} + \mu + s\psi = 0, \quad (33)$$

где $s = -\frac{dM_{Ds}}{d\varphi(\omega_0)}$ – крутизна статической характеристики двигателя;

$\vartheta = -\frac{dM_{c0}}{d\varphi(\omega_0)}$ – крутизна среднего момента сил сопротивления.

Систему (33) путем преобразования [4,15] можно записать как одно дифференциальное уравнение третьего порядка относительно $\psi(t)$

$$\tau J_0 \ddot{\psi} + (J_0 + \tau \vartheta) \dot{\psi} + (\vartheta + s)\psi = \tau \dot{L}(t) + L(t). \quad (34)$$

Полагая, что в реальных машинах имеет место $\tau \vartheta \ll J_0$, уравнение (34) можно упростить в виде

$$\tau_m \tau \ddot{\psi} + \tau_m \dot{\psi} + \psi = \frac{1}{(\vartheta + s)} [\tau \dot{L}(t) + L(t)], \quad (35)$$

где $\tau_m = \frac{J_0}{(\vartheta + s)}$ [с] – механическая постоянная времени машины.

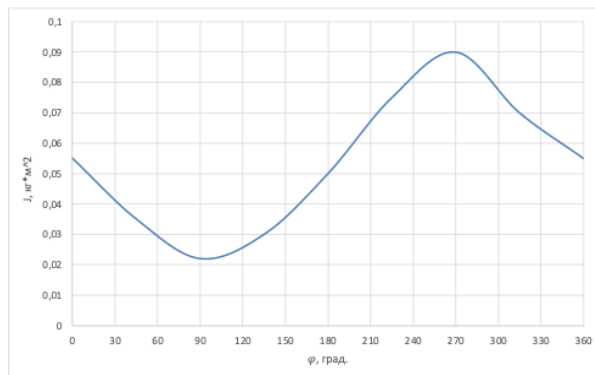


Рисунок 3. График зависимости момента инерции базисного звена механизма $J_{2,0}$ от угла поворота кривошипа

На примере кривошипного пресс-автомата путем замены переменных преобразовать уравнение (34) или (35) в систему дифференциальных уравнений первого порядка и решить численными методами. В работе [15] уравнение (35) решено аналитически с помощью разложения возмущающей силы $L(t)$ и решение $\psi(t)$ в ряды Фурье. Эти решения являются полезными для оценки динамических ошибок по угловому положению и

скорости, анализа амплитудной характеристики ряда Фурье, описывающего колебательный процесс около установившегося режима машины. Также оценки полученных решений на основе численного моделирования. На рисунке 3 представлен график зависимости момента инерции базисного звена механизма $J_{2,0}$ от угла поворота кривошипа φ для случая, когда центр масс базисного звена смещён (при $a \neq 0$). Видно, что момент инерции изменяется периодически, что создаёт вибрационные колебания в системе. Это подтверждает, что в конструкции необходимо минимизировать смещение, чтобы исключить эти флуктуации.

Результаты и Обсуждение

В результате проведенного исследования была разработана аналитическая методика динамического проектирования кривошипного пресс-автомата, основанная на модели шестизвенного механизма Стефенсона. Основное внимание уделено определению коэффициента неравномерности вращения, расчету возмущающего момента, скорости установившегося режима и момента инерции маховика. Разработанная модель позволяет учитывать колебательные характеристики привода и влияние конструктивных особенностей механизма на устойчивость его работы.

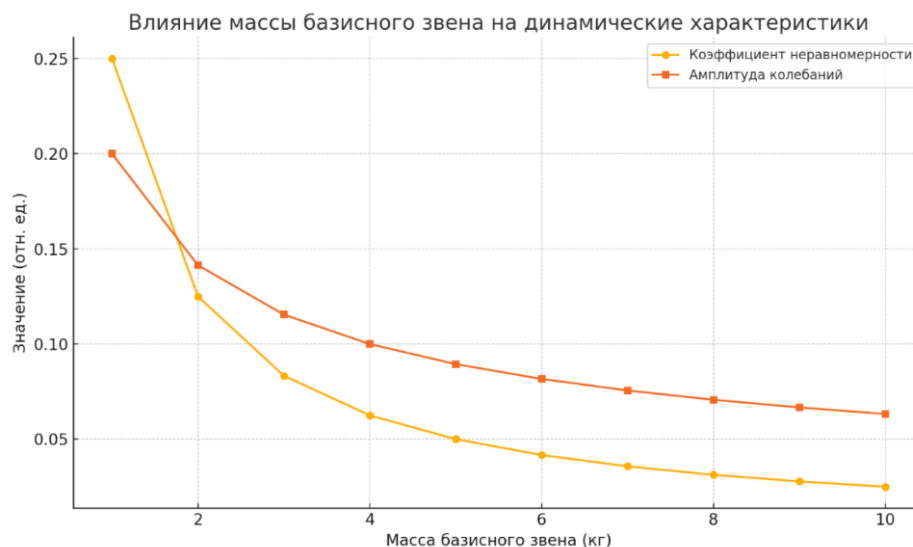


Рисунок 4. Влияние массы базисного звена на динамические характеристики

Одним из ключевых результатов стало выявление зависимости динамических погрешностей от массы и формы базисного звена. Было показано, что базисное звено, обладающее определенной геометрией и массой, может эффективно выполнять функцию встроенного противовеса, существенно снижая амплитуду колебаний и неравномерность вращения. Это подтверждено как аналитически, так и численно, включая расчет по методу последовательных приближений и разложению в ряды Фурье. Результаты сопоставлены с выводами других авторов, в том числе работами Jomartov et al. (2020, 2021), где рассматривалась структура и кинематика механизма Стефенсона II. В отличие от указанных исследований, данная работа впервые акцентирует внимание на интеграции массы базисного звена в общий инерционный баланс системы, снижая требования к

применению массивного маховика. Таким образом, предложенная методика демонстрирует существенное преимущество в аспекте предварительного динамического проектирования. Полученные аналитические выражения, в частности, формулы (25), (27) и (28), могут быть использованы конструкторами и инженерами для оптимизации конструкции привода пресс-автоматов. Метод позволяет формализованно определить оптимальные параметры маховика и базисного звена с учётом колебательной динамики. Внедрение предложенного подхода может повысить надёжность и точность работы кривошипных машин, особенно в условиях переменной нагрузки и высокой цикличности.

Заключение

В данной работе представлена аналитическая методика динамического проектирования кривошипного пресс-автомата, основанного на шестизвённом механизме Стефенсона. Проведён комплексный анализ влияния конструкции механизма на его динамические характеристики с акцентом на неравномерность вращения, амплитуду колебаний и момент инерции маховика. Ключевым результатом исследования стало доказательство того, что масса и форма базисного звена могут быть использованы в качестве встроенного противовеса, эффективно уменьшая колебательные процессы и снижая требования к дополнительным инерционным элементам. Применение разработанной методики позволяет проводить предварительный расчет критически важных параметров механизма и привода на ранней стадии проектирования. Разработанные уравнения и алгоритмы, включая метод последовательных приближений и разложение функций в ряды Фурье, обеспечивают точность оценок и универсальность применения. Представленные графики и численные результаты подтверждают высокую эффективность предложенного подхода и его практическую значимость для создания энергоэффективных и надёжных пресс-автоматов нового поколения.

Благодарность, конфликт интересов

Работа выполнена в рамках проекта грантового финансирования МНВО РК AP23490285.

Вклад авторов

Тулешов А.К. – разработка концепции исследования, построение математической модели, формализация аналитических выражений, постановка задач и руководство проектом.

Куатова М.Ж. – аналитическая обработка результатов, реализация численных методов, оформление графического материала и участие в интерпретации полученных данных.

Хабиев А. – участие в анализе литературы, сравнение с предыдущими исследованиями, подготовка текста аннотации и обсуждения результатов. **Меркибаева Б.** – структурирование статьи, оформление таблиц и библиографического списка, участие в редактировании и корректуре окончательного варианта рукописи.

Список литературы

1. Ю. А. Бочаров, Кузнечно-штамповочное оборудование (Академия, Москва, 2008), 384 с.-книга

2. А. Жомартов, А. Тулешов, Н. Жамалов, М. Куатова, А. Каимов, Int. J. Mech. Prod. Eng. Res. Dev. 10, 501 (2020), <https://doi.org/10.24247/ijmperdapr202053>.-статья
3. А. Жомартов, Р. Халиджиоглу, М. Куатова, Proc. Inst. Mech. Eng. B: J. Eng. Manuf. 236, 1113 (2021), <https://doi.org/10.1177/09544054211062976>.- статья
4. И. И. Вульфсон, М. Л. Ерихов, М. З. Коловский, Э. Е. Пейсах, Механика машин, под ред. Г. А. Смирнова (Высшая школа, Москва, 1996), 542 с.-книга
5. И. И. Вульфсон, М. З. Коловский, Нелинейные задачи динамики машин (Машиностроение, Ленинград, 1968), 300 с.-книга
6. И. И. Вульфсон, Динамика цикловых машин (Политехника, Санкт-Петербург, 2013), 464 с.-книга
7. М. З. Колосковский, А. Н. Евграфов, Ю. А. Семёнов, А. В. Слоущ, Теория механизмов и машин (Академия, Москва, 2006), 352 с.- статья
8. Н. И. Левитский, Колебания в механизмах (Наука, Москва, 1988), 296 с.- статья
9. А. Приходько, Actuators 10, 174 (2021), <https://doi.org/10.3390/act10080174>.- статья
10. М. Т. Орваньнос-Герреро, М. Асеведо, К. Н. Санчес и др., Mathematics 10, 1830 (2022), <https://doi.org/10.3390/math10111830>.- статья
11. А. Жомартов, А. Тулешов, М. Куатова, J. Math. Mech. Comput. Sci. 2(102), 22 (2019).- статья
12. А. К. Тулешов, Ю. М. Дракунов, Е. А. Тулешов, World Engineering Congress (Кучинг, Малайзия, 2010), с. 92.- статья
13. М. Куатова, А. Жомартов, Б. Меркибаева, Е. Тулешов, в Advances in Asian Mechanism and Machine Science, ред. А. Тулешов, А. Жомартов, М. Чеккарелли (Springer, 2024), т. 167, https://doi.org/10.1007/978-3-031-67569-0_56.- статья
14. А. К. Тулешов, Ю. М. Дракунов, А. А. Молдыбаева, Вестн. КазНУ 1(48), 61 (2006).- статья
15. Ю. М. Дракунов, Е. А. Тулешов, Материалы Междунар. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения» (КазНТУ, Алматы, 2009), с. 132.- труды конференции
16. М. М. Молдабеков, А. К. Тулешов, Г. У. Уалиев, Математическое моделирование динамики механизмов и машин (Алматы, 1998), 184 с.- статья

А.К. Тулешов¹, М.Ж. Куатова^{*1,2}, А.Т. Хабиев¹, Б. Меркибаева¹

¹ У.А. Джолдасбеков атындағы механика және машинатану институты,
Қазақстан Республикасы, Алматы қ.

²Халықаралық инженерлі-технологиялық университеті
Қазақстан Республикасы, Алматы қ.

Алты буынды механизм негізіндегі қосиінді баспақтың динамикалық сипаттамаларын және маховигін есептеудің аналитикалық тәсілі

Аңдатпа. Мақалада қазіргі сервопрестерде кеңінен қолданылатын Стефенсонның алты буынды механизмі негізіндегі гибриді қосиінді баспақтың динамикалық жобалау әдістемесі қарастырылады. Қозғалыстың біркелкі еместік коэффициенті, қоздырушы моменттің сипаттамалары, сондай-ақ маховиктің инерциялық моменті мен орныққан қозғалыс режимінің орташа жылдамдығын анықтау әдістемесі егжей-тегжейлі талданған. Негізгі буынның массасы мен пішінінің жүйенің динамикалық мінез-құлқына әсері ерекше

назарға алынған. Бұл параметрлерді дұрыс таңдаған жағдайда, негізгі буын кіріктірілген қарсы салмақтың рөлін атқара алатыны көрсетілген, бұл айнарудың біркелкі еместігін және механизмнің динамикалық қателіктерін едәуір азайтуға мүмкіндік береді. Өз кезегінде маховик массасына қойылатын талаптарды төмендетуге жол ашады, ал бұл энергия үнемдейтін машиналарды жобалауда аса маңызды. Жұмыста аналитикалық тәсіл, математикалық модельдеу және сандық талдау әдістері қолданылған. Қозғалыс теңдеулерін шешудің алгоритмдері әзірленіп, динамикалық қателіктерге баға берілген. Алынған формулалар мен сандық нәтижелер ұсынылған әдістеменің тиімділігін дәлелдейді және оның практикалық қолданбалығын көрсетеді. Бұл әдіс прототиптерді алдын ала жобалау кезінде энергетикалық және вибродинамикалық сипаттамаларды ескере отырып, жобалаудың бастапқы кезеңдерінде өте пайдалы. Жұмыстың нәтижелері штамптау жабдықтарына арналған зияткерлік жетекті жүйелерді жасау кезінде қолданылуы мүмкін.

Түйін сөздер: қосиінді баспақ, алты буынды механизм, маховик, виброактивтілік, динамикалық қате, сандық модельдеу.

**A.K. Tuleshov¹, M.Zh. Kuvatova^{*1,2}, A.T. Khabiev¹,
B. Merkibayeva¹**

¹Institute of mechanics and engineering named after academician U.A. Dzholdasbekov, Republic of Kazakhstan, Almaty c.

²International Engineering and Technology University, Republic of Kazakhstan, Almaty c.

Analytical Approach to Calculating the Dynamic Characteristics and Flywheel of a Six-Link Crank Press Mechanism

Abstract. The paper presents a methodology for the dynamic design of a hybrid crank press based on the Stephenson six-link mechanism, which is widely used in modern servo presses. A detailed analysis is carried out on the motion nonuniformity coefficient, the characteristics of the disturbing torque, as well as the procedure for determining the flywheel's moment of inertia and the average velocity under steady-state conditions. Special attention is given to studying the influence of the mass and geometry of the base link on the system's dynamic behavior. It is shown that, with a proper selection of these parameters, the base link can act as a built-in counterweight, significantly reducing rotational nonuniformity and dynamic errors of the mechanism. This, in turn, allows for a reduction in the required flywheel mass, which is especially important when designing energy-efficient machines. The study employs an analytical approach incorporating mathematical modeling and numerical analysis techniques. Algorithms for solving the system's differential equations of motion are developed, and dynamic errors are evaluated. The derived formulas and numerical results confirm the effectiveness of the proposed methodology and demonstrate its practical applicability. The method is particularly useful for the preliminary design of presses, enabling consideration of energy and vibration-dynamic characteristics at early design stages. The results can be utilized in the development of intelligent drive systems for stamping equipment.

Keywords: crank press, six-link mechanism, flywheel, vibration activity, dynamic error, numerical modeling

References

1. Bocharov Yu.A. Kuznechno-shtampovochnoye oborudovaniye [Forging and stamping equipment]. – Moscow: Akademiya, 2008. – 384 p. [in Russian]
2. Jomartov A., Tuleshov A., Jamalov N., Kuatova M., Kaimov A. Designing of the Stephenson II six-link linkage actuator for servo mechanical press // International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development. – 2020. – Vol. 10. – P. 501–512. – <https://doi.org/10.24247/ijmperdapr202053>.
3. Jomartov A., Halicioglu R., Kuatova M. Kinetostatic analysis, manufacturing, and experimental application of a press machine based on Stephenson II mechanism // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture. – 2021. – Vol. 236(8). – P. 1113–1124. – <https://doi.org/10.1177/09544054211062976>.
4. Vul'fson I.I., Erikhov M.L., Kolovskiy M.Z., Peysakh E.E. Mekhanika mashin [Machine mechanics] / Ed. Smirnov G.A. – Moscow: Vysshaya shkola, 1996. – 542 p. [in Russian]
5. Vul'fson I.I., Kolovskiy M.Z. Nelineynnye zadachi dinamiki mashin [Nonlinear problems of machine dynamics]. – Leningrad: Mashinostroyeniye, 1968. – 300 p. [in Russian]
6. Vul'fson I.I. Dinamika tsiklovyykh mashin [Dynamics of cyclic machines]. – Saint Petersburg: Politehnika, 2013. – 464 p. [in Russian]
7. Koloskovskiy M.Z., Yevgrafov A.N., Semyonov Yu.A., Sloushch A.V. Teoriya mekhanizmov i mashin [Theory of mechanisms and machines]. – Moscow: Akademiya, 2006. – 352 p. [in Russian]
8. Levitskiy N.I. Kolebaniya v mekhanizmax [Oscillations in mechanisms]. – Moscow: Nauka, 1988. – 296 p. [in Russian]
9. Prikhodko A. Dynamic Analysis of Intermittent-Motion Conveyor Actuator // Actuators. – 2021. – Vol. 10(8). – Article 174. – <https://doi.org/10.3390/act10080174>.
10. Orvañanos-Guerrero M.T., Acevedo M., Sánchez C.N., et al. Complete Balancing of the Six-Bar Mechanism Using Fully Cartesian Coordinates and Multiobjective Differential Evolution Optimization // Mathematics. – 2022. – Vol. 10. – Article 1830. – <https://doi.org/10.3390/math10111830>.
11. Jomartov A., Tuleshov A., Kuatova M. Simulation of the crank press dynamics by SimulationX software // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. – 2019. – No. 2(102). – P. 22–33.
12. Tuleshov A.K., Drakunov Yu.M., Tuleshov E.A. Computer dynamics of the internal-combustion engine considering elastic properties of links // World Engineering Congress. – 2010. – P. 92–96. – Kuching, Malaysia.
13. Kuatova M., Jomartov A., Merkiybayeva B., Tuleshov Y. Experimental Study of a Crank Press Based on a Stephenson II Six-Bar Linkage Mechanism // In: Tuleshov A., Jomartov A., Ceccarelli M. (eds) Advances in Asian Mechanism and Machine Science. – Springer, 2024. – Vol. 167. – https://doi.org/10.1007/978-3-031-67569-0_56.
14. Tuleshov A.K., Drakunov Yu.M., Moldybaeva A.A. Zadacha dinamiki rykhazhnykh mekhanizmov s uchetom uprugikh svoystv zven'ev [Dynamic problem of lever mechanisms considering the elastic properties of links] // Vestnik KazNU. – 2006. – No. 1(48). – P. 61. [in Russian]
15. Drakunov Yu.M., Tuleshov E.A. Dialogovaya sistema vyvoda i analiza uravneniy dinamiki mekhanizma press-avtomata [Dialogue system for deriving and analyzing the dynamic

- equations of a press mechanism] // Proc. of the Int. Conf. 'Actual Problems of Mechanics and Mechanical Engineering'. – Almaty: KazNTU, 2009. – P. 132–137. [in Russian]
16. Moldabekov M.M., Tuleshov A.K., Ualiev G.U. Matematicheskoye modelirovaniye dinamiki mekhanizmov i mashin [Mathematical modeling of mechanisms and machines dynamics]. – Almaty, 1998. – 184 p. [in Russian]

Сведения об авторах

Тулешов Амандык Куатович - доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова, ул. Шевченко, 28, город Алматы, Казахстан, 050010, aman_58@mail.ru;

Куатова Молдир Жангелдиевна - автор для корреспонденции, PhD, ведущий научный сотрудник Института механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова, ул. Шевченко, 28, город Алматы, Казахстан, 050010, e-mail: kuatova.moldyr@gmail.com;

Хабиев Алибек Талгатович - PhD, ведущий научный сотрудник Института механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова, ул. Шевченко, 28, город Алматы, Казахстан, 050010;

Меркибаева Бахыт Меркибаевна - научный сотрудник Института механики и машиноведения имени академика У.А.Джолдасбекова, ул. Шевченко, 28, город Алматы, Казахстан, 050010;

Амандық Түлешов Қуатович – техника ғылымдарының докторы, профессор, академик У.А.Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институтының бас ғылыми қызметкері, Шевченко көшесі 28, Алматы қаласы, Қазақстан, 050010, aman_58@mail.ru
Қуатова Мөлдір Жангелдиевна – хат алмасуға жауапты автор, PhD, академик У.А.Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институтының жетекші ғылыми қызметкері, Шевченко көшесі 28, Алматы қаласы, Қазақстан, 050010, e-mail: kuatova.moldyr@gmail.com;

Хабиев Алібек Талғатұлы – PhD, академик У.А.Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институтының жетекші ғылыми қызметкері, Шевченко көшесі 28, Алматы қаласы, Қазақстан, 050010;

Меркібаева Бақыт Меркібайқызы – академик У.А.Жолдасбеков атындағы Механика және машинатану институтының ғылыми қызметкері, Шевченко көшесі 28, Алматы қаласы, Қазақстан, 050010;

Amandyk Tuleshov Kuatovich – Doctor of Technical Sciences, Professor, Chief Researcher at the Institute of Mechanics and Machine Science named after Academician U.A. Zholdasbekov, 28 Shevchenko Street, Almaty, Kazakhstan, 050010, aman_58@mail.ru;
Kuatova Moldir Zhangeldievna – Corresponding author, PhD, Leading Researcher at the Institute of Mechanics and Machine Science named after Academician U.A. Zholdasbekov, 28 Shevchenko Street, Almaty, Kazakhstan, 050010, e-mail: kuatova.moldyr@gmail.com;
Khabiev Alibek Talgatovich – PhD, Leading Researcher at the Institute of Mechanics and Machine Science named after Academician U.A. Zholdasbekov, 28 Shevchenko Street, Almaty, Kazakhstan, 050010;

Merkibayeva Bakhyt Merkibayevna – Researcher at the Institute of Mechanics and Machine Science named after Academician U.A. Zholdasbekov, 28 Shevchenko Street, Almaty, Kazakhstan, 050010;



Copyright: © 2025 by the authors. Submitted for possible open access publication under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY NC) license (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0>)